UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO C

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1.- (15 ptos.) Calcule las siguientes integrales :

a) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^3(x).\sec(x)\, dx$;

b) $\displaystyle\int x \ln(\sqrt{x})\, dx$;

c) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\, dx$.

2.- (8 ptos.)

a) Halle la derivada de la función $f(x) = x^{\cos(x)}$;

b) halle la ecuación de la recta tangente en $A(\pi , \frac{1}{\pi})$ a la gráfica de f(x).

3.- (7 ptos.) Demuestre que si u, v son dos números reales cualesquiera entonces : $e^u.e^v = e^{u+v}$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO C

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

SOLUCIONES :

a) $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^3(x).\sec(x)\,dx$;

poniendo u= sec(x) se tiene :

$du=\sec(x)\tan(x)dx$; $\tan^3(x).\sec(x))\,dx =(u^2-1)du$.

$$\int \tan^3(x).\sec(x)\,dx = \int (u^2-1)du = \frac{u^3}{3} - u = \frac{(\sec(x))^3}{3} - \sec(x) + C \;;$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \tan^3(x).\sec(x)\,dx = \left[\frac{(\sec(x))^3}{3} - \sec(x) \right]_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{2}{3} + \frac{10\sqrt{3}}{27} = \frac{18+10\sqrt{3}}{27} \;.$$

b) $\displaystyle\int x \ln(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}\int x \ln(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\ln(x) - \frac{x^2}{2}\int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{8}\left[2.\ln(x) - 1 \right] + C\right.$

c) $\displaystyle\int \frac{1+x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx = \ln(x+\sqrt{1+x^2}\,) + \sqrt{1+x^2} + C$.

UNIVERSIDAD SIMON BOLIVAR
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas.

MA1112 abril-julio de 2005
segundo examen parcial (30%)
9-06-2005

TIPO C

Duración : 1 hora 45 minutos.

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

2.- a) Halle la derivada de la función $f(x) = x^{\cos(x)}$;

$f(x) = x^{\cos(x)} = e^{\cos(x).\ln(x)}$; $f\,'(x) = x^{\cos(x)}[\, -\mathrm{sen}(x).\ln(x) + \dfrac{\cos(x)}{x}\,]$;

$f\,'(\pi) = \dfrac{1}{\pi}\,[\, 0 + \dfrac{-1}{\pi}\,] = -\dfrac{1}{\pi^2}$;

la ecuación de la recta tangente en $A(\pi\, , \dfrac{1}{\pi})$ a la gráfica de f(x) es :

$$\frac{y - \frac{1}{\pi}}{x-\pi} = -\frac{1}{\pi^2} \quad \Rightarrow \; x + \pi^2 y - 2\pi = 0 \; .$$

3.- Demuestre que si u, v son dos números reales cualesquiera entonces :

$$e^u.e^v = e^{u+v} \; .$$

Manera #1 : como la función logaritmo natural es inyectiva , bastará verificar que se tiene : $\ln(e^u.e^v) = \ln(e^{u+v})$; en efecto :

$\ln(e^u.e^v) = \ln(e^u) + \ln(e^v) = u+v = \ln(e^{u+v})$.

Manera #2 :
verifiquemos que la función f(x) definida en el conjunto de todos los reales por

$$f(x) = \frac{e^{u+x}}{e^x} - e^u$$

es la función nula ; usando primero una consecuencia del teorema del valor medio [que una función , definida en un intervalo, continua y derivable, con derivada identicamente nula es constante] y evaluando luego la función en x=0 .

En efecto tenemos : $f\,'(x) = \dfrac{e^{u+x}e^u - e^x e^{u+x}}{e^{2x}} = 0$; $f(0) = \dfrac{e^u}{1} - e^u = 0$.